$$\hat{T}^a_{bc} = -(\varphi^d_{bc} + \varphi^d_{cb}) f^a_d + (\varphi^a_{db} - \varphi^a_{bd}) f^d_c, \qquad (19)$$

то выполняются равенства (I8). Справедливо и обратное утверждение.

Тензор $\hat{T}^a_{bc}$ можно использовать для преобразования компонент $\mathring{\gamma}^a_{bc}$ объекта связности $\mathring{\gamma}^a_{bL}$. Система величин $\hat{\gamma}^a_{bc} = \mathring{\gamma}^a_{bc} + \hat{T}^a_{bc}$, $\hat{\gamma}^a_{b\sigma} = \mathring{\gamma}^a_{b\sigma}$, $\hat{\gamma}^a_{b\,p+\tau} = \mathring{\gamma}^a_{b\,p+\tau}$ также будет определять связность в распределении η. Тензор $\hat{T}^a_{bc}$ мы будем называть тензором "слабой" деформации связности $\mathring{\gamma}^a_{bL}$. Выясним геометрический смысл осуществленной деформации. Относительно связности $\hat{\gamma}^a_{bL}$ поле (9) структурного объекта f^a_b, определяющего почти комплексную структуру в распределении η, записывается следующим образом

$$df^a_b - f^a_c \hat{\omega}^c_b + f^c_b \hat{\omega}^a_c = \overset{\hat{\gamma}}{\tilde{f}}{}^a_{bc}\,\omega^c + \overset{\mathring{\gamma}}{\tilde{f}}{}^a_{b\sigma}\,\omega^\sigma + \overset{\mathring{\gamma}}{\tilde{f}}{}^a_{b\,p+\sigma}\,\omega^{p+\sigma}. \qquad (20)$$

Кривые, принадлежащие распределению η, в построенном каноническом репере, определяются системой:

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega^\sigma = 0, \quad \omega^a = \lambda^a \theta. \qquad (21)$$

Очевидно, что при смещении элемента распределения Λ по кривым, принадлежащим распределению η, объекты f^a_b ковариантно постоянны в связности $\hat{\gamma}^a_{bL}$.

Т е о р е м а 2. Связность $\hat{\gamma}^a_{bL}$, полученная деформацией связности $\mathring{\gamma}^a_{bL}$ при помощи тензора "слабой" деформации $\hat{T}^a_{bc}$, вдоль кривых, принадлежащих распределению η, является φ-связностью.

Тензор Нейенхейса аффинора

$$N^a_{bc} = \varphi^a_{bd} f^d_c - \varphi^a_{db} f^d_c - (\varphi^a_{cd} - \varphi^a_{dc}) f^d_b, \qquad (22)$$

и следовательно

$$N^a_{bc} = \hat{T}^a_{bc} - \hat{T}^a_{cb}. \qquad (23)$$

Список литературы

1. Акматов Б. Об инвариантном построении геометрии распределений m-мерных линейных элементов в дифференцируемом многообразии M_n. Рук. деп. ВИНИТИ. М., 1983, 35с. библ. 20 назв. 26 мая 1983. № 2874-83 Деп.
2. Акматов Б. О связностях в структурных распределениях индуцированной $(f^\xi_\eta f)$-структуры в M_n почти комплексной структуры. Рук. деп. ВИНИТИ. М., 1984.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. I6 I985

УДК 514.75

Г. П. Б о ч и л л о

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ Δ_m НА МНОГООБРАЗИИ ВСЕХ ГИПЕРПЛОСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ n - МЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА $(m > n)$

В работе продолжено изучение m-распределений на многообразии M_{2n-1} всех гиперплоских элементов n-мерного проективного пространства P_n. В смысле [1] Δ_m являются распределениями касательных элементов, порожденных m-мерными подмногообразиями гиперплоских элементов $\{A, \alpha\}$. Под гиперплоским элементом, как и в [2], понимается пара из точки A и инцидентной ей гиперплоскости α пространства P_n. В данной работе рассмотрены распределения Δ_m на M_{2n-1} в случае $n < m < 2n-1$, $(m = n + m_0 - 1, 1 < m_0 < n)$. Доказана теорема, дающая геометрическую характеристику распределения Δ_m, построено его оснащение. Показано, что с Δ_m при $m > n$ ассоциируется инвариантное подраспределение $\tilde{\Delta}_{2n-m-1}$, причем $2n-m-1 < n$. Отсюда следует, что в случае $n < m < 2n-1$ могут быть использованы результаты из [3], [4]. В работе индексы принимают следующие значения: $\mathcal{I}, \mathcal{J} = 0, \overline{1,n}$; $i, j = \overline{1,n}$; $p, q, \tau = \overline{1,n-1}$; $a, b, c = \overline{1, m_0 - 1}$; $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = \overline{m_0, n-1}$, $1 < m_0 < n$.

I. Распределения Δ_m на M_{2n-1} ($n < m < 2n-1$). Присоединим к каждому элементу $\{A, \alpha\}$ многообразия M_{2n-1} точечные $R = \{A_{\mathcal{I}}\}$ и тангенциальные $\tau = \{\alpha^{\mathcal{I}}\}$ подвижные реперы, деривационные формулы которых имеют вид $dA_{\mathcal{I}} = \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{I}} A_{\mathcal{J}}$, $d\alpha^{\mathcal{I}} = -\omega^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}} \alpha^{\mathcal{J}}$, причем 1-формы $\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{I}}$ удовлетворяют условиям $d\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{I}} = \omega^{\mathcal{K}}_{\mathcal{I}} \wedge \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}$, $\sum \omega^{\mathcal{I}}_{\mathcal{I}} = 0$. Положив $A = A_0$, $\alpha = \alpha^n$ перейдем к реперам $R_0(\tau^0)$ нулевого порядка со структурными формами $\omega^p_0, \omega^n_0, \omega^n_p$ многообразия M_{2n-1}. Распределение Δ_m на M_{2n-1} можно определить системой $(2n-m-1)$ линейно независимых уравнений Пфаффа:

$$\omega^n_{\bar a} - \Lambda^n_{\bar a i}\,\omega^i_0 - \Lambda^{na}_{\bar a}\,\omega^n_a = 0. \qquad (I)$$

Система форм в (I), аннулирующихся на Δ_m, инвариантна относительно подгруппы стационарности гиперплоского элемента $\{A,\alpha\}$, что обеспечивается заданием на M_{2n-1} поля геометрического объекта $\Gamma_0=\{\Lambda^n_{\bar a i}, \Lambda^{nb}_{\bar a}\}$,

$$\Delta\Lambda^n_{\bar a i} \equiv \nabla\Lambda^n_{\bar a i} + \Lambda^n_{\bar a i}\omega^0_0 + \Lambda^{nb}_{\bar a}\Lambda^n_{\bar b i}\omega^{\bar b}_b + \Lambda^{nb}_{\bar a}\delta^n_i\omega^0_b - \delta^n_i\omega^0_{\bar a} = \bar\Lambda^n_{\bar a ij}\omega^j_0 + \bar\Lambda^{np}_{\bar a i}\omega^n_p, \qquad (2)$$
$$\Delta\Lambda^{nc}_{\bar a} \equiv \nabla\Lambda^{nc}_{\bar a} - \Lambda^{nc}_{\bar a}\omega^n_n + \Lambda^{nb}_{\bar a}\Lambda^{nc}_{\bar b}\omega^{\bar b}_b - \omega^c_{\bar a} = -A^{nc}_{\bar a i}\omega^i_0 - A^{ncp}_{\bar a}\omega^n_p.$$

2. Геометрическая интерпретация распределения Δ_m. Распределению Δ_m на M_{2n-1} при $n<m<2n-1$ принадлежат два неинволютивных в общем случае подраспределения, которые определяются, соответственно, системами:

$$\omega^n_{\bar a} - \Lambda^n_{\bar a i}\omega^i_0 - \Lambda^{na}_{\bar a}\omega^n_a = 0, \quad \omega^i_0 = 0, \qquad (3)$$
$$\omega^n_{\bar a} - \Lambda^n_{\bar a i}\omega^i_0 - \Lambda^{na}_{\bar a}\omega^n_a = 0, \quad \omega^n_p = \omega^n_0 = 0. \qquad (3')$$

Они представляют собою совокупности всех 1-семейств многообразия M_{2n-1}, вдоль которых неподвижны, соответственно, точка A_0 и гиперплоскость α^n. Обозначим указанные подраспределения $\Delta^{A_0}_{m_0-1}$ и $\Delta^{\alpha^n}_{m_0-1}$, соответственно.

Геометрическую характеристику объекту Γ_0 при условии $R\|\Lambda^n_{\bar a i}\| = n-m_0$ дает следующая

Т е о р е м а 1. Задание распределения Δ_m на M_{2n-1} ($n<m<2n-1$, $m=n+m_0-1$) эквивалентно оснащению многообразия M_{2n-1} полями (m_0-1)-плоскостей L_{m_0-1} и $(n-m_0)$-плоскостей ℓ_{n-m_0}, инцидентных A_0 и α^n одновременно и не имеющих общих точек, кроме A_0, а также отображением множества m_0-плоскостей, проходящих через L_{m_0-1}, на множество $(n-m_0-1)$-плоскостей, инцидентных ℓ_{n-m_0}.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассматривая $[A_0 dA_0]$, $[\alpha^n d\alpha^n]$ вдоль интегральных 1-семейств распределений $\Delta^{\alpha}_{m_0-1}$ и $\Delta^{A_0}_{m_0-1}$ соответственно, получаем, что $[A_0 dA_0] \in L_{m_0-1} = [A_0, A_a + \hat\Lambda^{\bar b}_{0a} A_{\bar b}]$, $[\alpha^n d\alpha^n] \supset \ell_{n-m_0} = [\alpha^n, \alpha^0 + \Lambda^{na}_{\bar a}\alpha^{\bar a}]$, где $\Lambda^n_{\bar a a} = \Lambda^n_{\bar a\bar b}\hat\Lambda^{\bar b}_{0a}$, $\det\|\Lambda^n_{\bar a\bar b}\| \neq 0$. Для доказательства последней части теоремы перейдем к реперам $R_1(\tau^1)$ так, что $L_{m_0-1}=[A_0 A_a]$, $\ell_{n-m_0}=[\alpha^n\alpha^0]$, $\Lambda^{na}_{\bar a}=0$. Тогда определяющая распределение Δ_m система (I) уравнений Пфаффа принимает вид $\omega^n_{\bar a} - \Lambda^n_{\bar a\bar b}\omega^{\bar b}_0 = 0$, а условия (2) превращаются в соотношения

$$\omega^b_{\bar a} = \Lambda^{nb}_{\bar a i}\omega^i_0 + \Lambda^{nbp}_{\bar a}\omega^n_p; \; \omega^{\bar b}_a = B^{n\bar b}_{ai}\omega^i_0 + B^{n\bar b p}_a\omega^n_p; \; \Lambda^n_{\bar a\bar b}\omega^{\bar b}_n + \omega^0_{\bar a} = C^n_{\bar a ni}\omega^i_0 + C^{np}_{\bar a n}\omega^n_p, \qquad (3)$$

$$\nabla\Lambda^n_{\bar a\bar b} + \Lambda^n_{\bar a\bar b}\omega^0_0 = C^n_{\bar a\bar b i}\omega^i_0 + C^{np}_{\bar a\bar b}\omega^n_p, \qquad (4)$$

где

$$B^{n\bar c}_{ai} = \Lambda^{\bar a\bar c}_n\bar\Lambda^n_{\bar a ai}, \quad B^{n\bar c p}_a = \Lambda^{\bar a\bar c}_n\bar\Lambda^{np}_{\bar a a}, \quad \Lambda^n_{\bar a\bar c}\Lambda^{\bar b\bar c}_n = \Lambda^n_{\bar c\bar a}\Lambda^{\bar c\bar b}_n = \delta^{\bar b}_{\bar a}, \qquad (5)$$
$$C^n_{\bar a ni} = -\bar\Lambda^n_{\bar a ni}; \quad C^{np}_{\bar a n} = -\bar\Lambda^{np}_{\bar a n}, \quad C^n_{\bar a\bar b i} = \bar\Lambda^n_{\bar a\bar b i}, \quad C^{np}_{\bar a\bar b} = \bar\Lambda^{np}_{\bar a\bar b}.$$

Система величин $\{\Lambda^n_{\bar a\bar b}\}$, удовлетворяющая уравнениям (4), образует невырожденный дважды ковариантный в общем случае несимметрический тензор, определяющий отображение множества m_0-плоскостей, инцидентных L_{m_0-1}, на множество $(n-m_0-1)$-плоскостей, инцидентных ℓ_{n-m_0}, по специальным формулам. Вычисления показывают, что требование инвариантности описанной геометрической конструкции в реперах $R_1(\tau^1)$ приводит к соотношениям (3)-(4).

3. Инвариантное подраспределение $\tilde\Delta_{2n-m-1}$. Система форм Пфаффа

$$\omega^n_{\bar a} - \Lambda^n_{\bar a\bar b}\omega^{\bar b}_0, \quad \omega^a_0, \quad \omega^n_a, \quad \omega^n_0 \qquad (6)$$

относительно инвариантна в силу (4) и первых двух групп соотношений (3), обеспечивающих в реперах $R_1(\tau^1)$ инвариантность системы $(2n-m-1)$ форм Пфаффа $\omega^n_{\bar a} - \Lambda^n_{\bar a\bar b}\omega^{\bar b}_0$, аннулирующихся на распределении Δ_m. Из разложений $dA_0 = \omega^0_0 A_0 + \omega^i_0 A_i$; $d\alpha^n = -\omega^n_0\alpha^0 - \omega^n_p\alpha^p - \omega^n_n\alpha^n$ заключаем, что вдоль интегральных 1-семейств подраспределения $\tilde\Delta_{2n-m-1}$, определяемого уравнениями

$$\omega^n_{\bar a} - \Lambda^n_{\bar a\bar b}\omega^{\bar b}_0 = 0, \quad \omega^a_0 = 0, \quad \omega^n_a = 0, \quad \omega^n_0 = 0, \qquad (7)$$

имеем $[A_0 dA_0] \in \ell_{n-m_0}$, $[\alpha^n d\alpha^n] \supset L_{m_0-1}$, а также множество прямых в ℓ_{n-m_0}, инцидентных A_0, отображается на множество $(n-2)$-плоскостей в α^n, инцидентных L_{m_0-1}. С другой стороны, в случае выполнения приведенных условий 1-семейство M_1 многообразия M_{2n-1} является интегральным 1-семейством распределения $\tilde\Delta_{2n-m-1}$. Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 2. 1-семейство M_1 многообразия M_{2n-1} является интегральным семейством распределения $\tilde{\Delta}_{2n-m-1}$ тогда и только тогда, когда касательная $[A_0 dA_0]$ к линии $A_0(M_1)$ принадлежит ℓ_{n-m_0}, а характеристика $[\alpha^n d\alpha^n]$ гиперплоскости α^n инцидентна L_{m_0-1}, причем прямой $x^{\bar{a}}[A_0 A_{\bar{a}}] \in \ell_{n-m_0}$ соответствует $(n-2)$-плоскость $x_{\bar{a}}[\alpha^n \alpha^{\bar{a}}] \supset L_{m_0-1}$, где $x_{\bar{a}} = \Lambda^n_{\bar{a}\bar{b}} x^{\bar{b}}$.

4. Оснащение распределения Δ_m. Используя уравнения (4), (5) и их дифференциальные продолжения, находим, что система величин $\gamma_1 = \{\Lambda^n_{\bar{a}\bar{b}}, \Gamma^{na}_{\bar{a}\bar{b}}, \Gamma^n_{a\bar{a}\bar{b}}, \Gamma^n_{\bar{c}a\bar{b}}\}$, где

$$\Gamma^{na}_{\bar{a}\bar{b}} = A^{na}_{\bar{a}\bar{b}} + A^{na\bar{c}}_{\bar{a}} \Lambda^n_{\bar{c}\bar{b}};\ \Gamma^n_{a\bar{a}\bar{b}} = \Lambda^n_{\bar{c}\bar{b}}(B^{n\bar{c}}_{a\bar{a}} + B^{n\bar{c}\bar{d}}_a \Lambda^n_{\bar{d}\bar{a}}),\ \Gamma^n_{\bar{c}a\bar{b}} = C^n_{\bar{c}a\bar{b}} + C^{n\bar{d}}_{\bar{c}a} \Lambda^n_{\bar{d}\bar{b}}$$

и $\Gamma^{n\bar{b}}_{a\bar{c}} = \Lambda^{\bar{a}\bar{b}}_n(\bar{\Lambda}^n_{\bar{a}a\bar{c}} + \bar{\Lambda}^{n\bar{d}}_{\bar{a}a} \Lambda^n_{\bar{d}\bar{c}}) = B^{n\bar{b}}_{a\bar{c}} + B^{n\bar{b}\bar{d}}_a \Lambda^n_{\bar{d}\bar{c}},\ \Gamma^{n\bar{a}\bar{b}}_a = \Lambda^{\bar{c}\bar{b}}_n \Gamma^{n\bar{a}}_{a\bar{c}},\ \Gamma^{na\bar{c}}_{\bar{a}} = \Gamma^{na}_{\bar{a}\bar{b}} \Lambda^{\bar{c}\bar{b}}_n$

образует самостоятельный объект, который является подобъектом фундаментального объекта первого порядка распределения Δ_m. Следовательно, γ_1 можно назвать фундаментальным подобъектом распределения $\tilde{\Delta}_{2n-m-1}$. Аналогично строится фундаментальный подобъект второго порядка распределения $\tilde{\Delta}_{2n-m-1}$. Используя компоненты γ_1, определим на M_{2n-1} поле $(n-m_0+1)$-пар $\{\ell_{n-m_0+1}, L_{m_0-2}\}$, где $\ell_{n-m_0+1} = [\alpha^a - \frac{1}{n-m_0}\Gamma^{na\bar{a}}_{\bar{a}} \alpha^n]$, $L_{m_0-2} = [A_a - \frac{1}{n-m_0}\Gamma^{n\bar{a}}_{a\bar{a}} A_0]$. Построенное поле вместе с тензором $\{\Lambda^n_{\bar{a}\bar{b}}\}$ порождает на M_{2n-1} $(n-m_0+1)$-распределение Δ_{n-m_0+1}, являющееся подраспределением. Из [3], [4] следует, что можно задать аффинную связность на M_{2n-1} с помощью нового поля гиперплоских элементов.

Т е о р е м а 3. Если на M_{2n-1} задано распределение Δ_m $(n<m<2n-1)$, то оснащение M_{2n-1} новым полем гиперплоских элементов может быть построено с использованием лишь компонент фундаментального подобъекта второго порядка распределения $\tilde{\Delta}_{2m-m-1}$ (подраспределения Δ_m).

Справедливость утверждения вытекает из теоремы 2 в [3], которую следует применить к построенному с использованием компонент γ_1 подраспределению Δ_{n-m_0+1}. Заметим, что $n-m_0+1 = 2n-m < n$.

5. Геометрическая характеристика пары подпространств $\{\ell_{n-m_0+1}, L_{m_0-2}\}$. В построенной паре подпространств ℓ_{n-m_0+1} – гармоническая поляра гиперплоскости α^n относительно фокусного конуса $K^{n-m_0}_{n-1}$ с вершиной ℓ_{n-m_0}, причем $K^{n-m_0}_{n-1} = \{\Gamma_{n-1}/\Gamma_{n-1} \supset \ell_{n-m_0}, \Gamma_{n-1} \supset \ell_{n-m_0} + d\ell_{n-m_0}\}$, а L_{m_0-2} – гармоническая поляра точки A_0 относительно фокусной поверхности $F^{n-m_0}_{m_0-2}$ в L_{m_0-1} и $F^{n-m_0}_{m_0-2} = \{M/M \in L_{m_0-1}, M+dM \in L_{m_0-1}\}$ вдоль интегральных I-семейств распределения $\tilde{\Delta}_{2n-m-1}$. Поверхности $K^{n-m_0}_{n-1}$, $F^{n-m_0}_{m_0-2}$ определяются следующими уравнениями относительно тангенциальных (точечных) координат $x_0, x_a, x_{\bar{a}}, x_n$ $(x^0, x^a, x^{\bar{a}}, x^n)$:

$$K^{n-m_0}_{n-1}:\ x_0 = x_{\bar{a}} = 0,\quad \det\|\Lambda^n_{\bar{a}\bar{b}} x_n + \Gamma^{na}_{\bar{a}\bar{b}} x_a\| = 0, \tag{8}$$

$$F^{n-m_0}_{m_0-2}:\ x^n = x^{\bar{a}} = 0,\quad \det\|\Lambda^{\bar{b}\bar{a}}_n x^0 + \Gamma^{n\bar{a}\bar{b}}_a x^a\| = 0, \tag{9}$$

причем $m_0 \le (n-m_0)^2$. Поскольку компоненты объекта γ_1, используемые в уравнениях (8) и (9), в общем случае несимметричны и некососимметричны по индексам $\bar{a}, \bar{b}$, то кроме $K^{n-m_0}_{n-1}$ и $F^{n-m_0}_{m_0-2}$ в случае $m_0 \le \frac{1}{2}(n-m_0)(n-m_0+1)$ и несимметричности компонент γ_1 определяются поверхности

$$x_0 = x_{\bar{a}} = 0,\quad \det\|\Lambda^n_{[\bar{a}\bar{b}]} x_n + \Gamma^{na}_{[\bar{a}\bar{b}]} x_a\| = 0, \tag{8'}$$

$$x^n = x^{\bar{a}} = 0,\quad \det\|\Lambda^{[\bar{b}\bar{a}]}_n x^0 + \Gamma^{n[\bar{a}\bar{b}]}_a x^a\| = 0, \tag{9'}$$

а в случае $m_0 \le \frac{1}{2}(n-m_0)(n-m_0+1)$ и некососимметричности компонент γ_1 поверхности

$$x_0 = x_{\bar{a}} = 0,\quad \det\|\Lambda^n_{(\bar{a}\bar{b})} x_n + \Gamma^{na}_{(\bar{a}\bar{b})} x_a\| = 0, \tag{8''}$$

$$x^n = x^{\bar{a}} = 0,\quad \det\|\Lambda^{(\bar{b}\bar{a})}_n x^0 + \Gamma^{n(\bar{a}\bar{b})}_a x^a\| = 0. \tag{9''}$$

Список литературы

1. Лаптев Г.Ф. Распределения касательных элементов.-Тр. геометрич.семинара.ВИНИТИ АН СССР.М.,1971,т.3,с.29-48.

2. Онищук Н.М. Распределения Δ_m на многообразии всех гиперплоских элементов n-мерного центроаффинного пространства $(m<n)$ -Геометрич.сб.вып.18,1979,с.59-71.

3. Бочилло Г.П. К дифференциальной геометрии m-распределений на многообразии всех гиперплоских элементов n-мерного проективного пространства.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.14.Калининград, 1983,с.18-22.

4. Бочилло Г.П. О дифференциальной геометрии m- распределений на многообразии всех гиперплоских элементов n-мерного проективного пространства $(m<n)$.Томский ун-т,Томск,1983,21с.(Рукопись деп.в ВИНИТИ АН СССР, 8 февраля,1984,№762-84 Деп.).